Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Дальневосточный государственный университет

Т.В. Пак

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ ПО ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДАМ

Методические указания и задания для студентов
математических специальностей

Владивосток
Издательство Дальневосточного университета
2007

ББК 22.132
П 13

Рецензент:
А.Г. Колобов, к.ф.-м.н. (ИМКН ДВГУ);

Пак Т.В.
П 13 **Лабораторные работы по Численным методам.** Учебно-методическое пособие. - Владивосток: Изд-во Дальневост. ун-та, 2007. - 24 с.

Лабораторные работы предназначены для студентов второго курса Института математики и компьютерных наук. Они поддерживают курс "Численные методы"по следующим темам: Интерполирование, дифференцирование, интегрирование, сплайны, решение нелинейных и алгебраических уравнений.

Для студентов математических специальностей.

$$\text{П}\frac{1702030000}{180(03)-2006}$$

ББК 22.132

1 Содержание

Тема 1. Интерполирование функции с помощью многочленов Лагранжа и многочленов Ньютона с разделенными разностями

1. На отрезке [a,b] получить таблицу значений функции y=f(x) в равноотстоящих точках $x_i = a + ih; i = 0, 1, 2, \ldots, 10; h = (b - a)/10$. Варианты функции $y = f(x)$ и отрезка [a,b] см. в таблице 1.

2. С помощью интерполяционных формул Лагранжа и Ньютона с разделенными разностями выполнить линейную интерполяцию в точке x^*. Допустима ли линейная интерполяция таблично заданной функции в точке $x^*(x_i{<}x^*{<}x_{i+1})$, обеспечивающая погрешность, не превосходящую 10^{-4}? Сравнить результаты со значением, получаемым при непосредственном вычислении по формуле $y^* = f(x^*)$. Варианты точки x^* см. в таблице 1.

3. С помощью интерполяционных формул Лагранжа и Ньютона с разделенными разностями выполнить квадратичную интерполяцию в точке x^*, используя три ближайшие точки $x_{i-1}, x_i,\ x_{i+1}$, $(x_{i-1}{<}x^*{<}x_{i+1})$. Допустима ли квадратичная интерполяция таблично заданной функции в точке x^*, обеспечивающая погрешность, не превосходящую 10^{-5}? Сравнить результаты со значением, получаемым при непосредственном вычислении по формуле $y^* = f(x^*)$.

Этапы выполнения лабораторной работы.

• Построить таблицу из 11 значений выбранной функции.

• По интерполяционной формуле Лагранжа первого порядка вычислить $L_1(x^*) = f(x_i) \cdot (x^* - x_{i+1})/(x_i - x_{i+1}) + f(x_{i+1}) \cdot (x^* - x_i)/(x_{i+1} - x_i)$.

• С помощью формулы остаточного члена интерполяционной формулы Лагранжа первого порядка $R_1(x) = f''(\xi)\omega_2(x)/2$, где $\xi \in [x_i, x_{i+1}]$, а $\omega_2(x) = (x - x_i) \cdot (x - x_{i+1})$, на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ оценить минимальное и максимальное значения $f''(x)$, а затем минимальное и максимальное значения остаточного члена $R_1(x)$.

• Проверить, выполняется ли неравенство $\min R_1 < R_1(x^*) < \max R_1$, $R_1(x^*) = L_1(x^*) - f(x^*)$. Ответить на вопрос п.2.

• По интерполяционной формуле Лагранжа второго порядка вычислить

$$L_2(x) = f(x_{i-1})\frac{(x^* - x_i)(x^* - x_{i+1})}{(x_{i-1} - x_i)(x_{i-1} - x_{i+1})} + f(x_i)\frac{(x^* - x_{i-1})(x^* - x_{i+1})}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})} +$$
$$+ f(x_{i+1})\frac{(x^* - x_{i-1})(x^* - x_i)}{(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)}.$$

• С помощью формулы остаточного члена интерполяционной формулы Лагранжа второго порядка

$R_2(x) = f'''(\xi)\omega_3(x)/6, \quad \xi \in [x_{i-1}, x_{i+1}], \omega_3(x) = (x - x_{i-1})(x - x_i)(x - x_{i+1})$, на $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ оценить минимальное и максимальное значения $f'''(x)$, а затем минимальное и максимальное значения остаточного члена $R_2(x)$.

• Проверить, выполняется ли неравенство $\min R_2 < R_2(x^*) < \max R_2$, $R_2(x^*) = L_2(x^*) - f(x^*)$. Ответить на вопрос п.3.

• Построить таблицу разделенных разностей по узлам x_{i-1}, x_i, x_{i+1}. Вычислить интерполяционные многочлены Ньютона:
$L_1(x^*) = f(x_i) + f(x_i, x_{i+1})(x^* - x_i)$ и
$L_2(x^*) = f(x_{i-1}) + f(x_{i-1}, x_i)(x^* - x_{i-1}) + f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x^* - x_{i-1}) \cdot (x^* - x_i)$.
Сравнить с соответствующими результатами, полученными по формулам Лагранжа.

Таблица 1.

№	y=f(x)	[a,b]	x*	x**	x***	x****
1	y=$x^2 + \ln(x)$	[0.4,0.9]	0.52	0.42	0.87	0.67
2	y=x$^2 - \lg(x+2)$	[0.5,1.0]	0.53	0.52	0.97	0.73
3	y=x$^2 + \ln(x) - 4$	[1.5,2.0]	1.52	1.52	1.97	1.77
4	y=(x-1)^2 -0.5e^x	[0.1,0.6]	0.13	0.12	0.57	0.33
5	y=(x-1)^2 -e^{-x}	[1.0,1.5]	1.07	1.02	1.47	1.27
6	y=x$^3 - \sin(x)$	[0.6,1.1]	0.92	0.62	1.07	0.83
7	y=4x$- \cos(x)$	[0.1,0.6]	0.37	0.12	0.57	0.37
8	y=x$^2 - \sin(x)$	[0.5,1.0]	0.77	0.52	0.97	0.73
9	y=x$- \cos(x)$	[0.5,1.0]	0.92	0.53	0.98	0.77
10	y=x$^2 - \cos(\pi x)$	[0.1,0.6]	0.37	0.12	0.58	0.33
11	y=x$^2 - \sin(\pi x)$	[0.4,0.9]	0.53	0.43	0.86	0.67
12	y=x$^2 - \cos(0.5\pi x)$	[0.4,0.9]	0.64	0.42	0.87	0.63
13	$y = x - 2\cos(0.5\pi x)$	[0.4,0.9]	0.71	0.43	0.87	0.67
14	y=x$- \sin(\pi x)$	[0.6,1.1]	0.88	0.63	1.08	0.83
15	y=2x$- \cos(x)$	[0.1,0.6]	0.44	0.13	0.58	0.37
16	y=x$^2 + \ln(x+5)$	[0.5,1.0]	0.73	0.52	0.97	0.73
17	y=0.5x$^2 + \cos(2x)$	[0.6,1.1]	0.84	0.62	1.07	0.83
18	y=x$^2 - 0.5e^{-x}$	[0.1,0.6]	0.37	0.12	0.58	0.33
19	y=x$^2 + \lg(x)$	[0.4,0.9]	0.53	0.43	0.86	0.67
20	y=x$- \lg(x+2)$	[0.5,1.0]	0.77	0.52	0.97	0.73
21	y=x$^2 - \lg(0.5x)$	[0.5,1.0]	0.92	0.53	0.98	0.77
22	y=x$^3 - \cos(2x)$	[0.1,0.6]	0.37	0.12	0.58	0.33
23	y=x$^2 + \cos(\pi x/2)$	[0.1,0.6]	0.13	0.12	0.57	0.33
24	y=x/2$- \cos(x/2)$	[0.4,0.9]	0.64	0.42	0.87	0.63

Тема 2. Интерполирование функции с помощью интерполяционных формул с конечными разностями

1. Построить таблицу конечных разностей для полученной при выполнении лабораторной работы №1 табличной функции.

2. Для таблицы с равноотстоящими узлами используются формулы:
1-я формула Ньютона по $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, x = x_0 + th$, $0 < t < 1$,
$$L_n(x_0+th) = f_0 + tf^1_{1/2} + \frac{t(t-1)}{2}f^2_1 + \ldots + \frac{t(t-1)\cdots(t-(n-1))}{n!}f^n_{n/2},$$
2-я формула Ньютона по $x_0, x_{-1}, x_{-2} \ldots, x_{-n}, x = x_0 + th$, $-1<t<0$,
$$L_n(x_0+th) = f_0 + tf^1_{-1/2} + \frac{t(t+1)}{2}f^2_{-1} + \ldots + \frac{t(t+1)\ldots(t+(n-1))}{n!}f^n_{-n/2},$$
1-я формула Гаусса по точкам $x_0, x_1, x_{-1}, x_2, x_{-2} \ldots, x_{n/2}, x_{-n/2}$,
$x = x_0 + th,\ 0 < t \leq 0.5$,
$$L_n(x_0+th)=f_0+tf^1_{1/2}+\frac{t(t-1)}{2}f^2_0+\ldots+\frac{t(t^2-1)\ldots(t^2-(\frac{n}{2}-2)^2)(t-(\frac{n}{2}-1))}{n!}f^n_0,$$
2-я формула Гаусса по точкам $x_0, x_{-1}, x_1, x_{-2}, x_2, \ldots, x_{-n/2}, x_{n/2}$,
$x = x_0 + th,\ -0.5\leq t<0$,
$$L_n(x_0+th)=f_0+tf^1_{-1/2}+\frac{t(t+1)}{2}f^2_0+\ldots+\frac{t(t^2-1)\ldots(t^2-(\frac{n}{2}-2)^2)(t+(\frac{n}{2}-1))}{n!}f^n_0.$$
Формула Стирлинга
$$L(x_0+th) = f_0+t\mu f^1_0+\frac{t^2}{2!}f^2_0+\ldots+\frac{t(t^2-1)(t^2-2^2)\ldots[t^2-(n-1)^2]}{(2n-1)!}\mu f^{2n-1}_0+$$
$$+\frac{t^2(t^2-1)\ldots[t^2-(n-1)^2]}{(2n)!}f^{2n}_0, \qquad \frac{1}{2}[f^{2n-1}_{1/2}+f^{2n-1}_{-1/2}] = \mu f^{2n-1}_0.$$
Формула Бесселя
$$L_{2n+2}(x_0+th) = \mu f_{1/2} + (t-\frac{1}{2})f^1_{1/2} + \frac{t(t-1)}{2!}\mu f^2_{1/2} + \ldots +$$
$$+\frac{t(t^2-1)(t^2-2^2)\ldots[t^2-(n-1)^2](t-n)}{(2n)!}\mu f^{2n}_{1/2}+$$
$$+\frac{t(t^2-1)\ldots[t^2-(n-1)^2](t-n)(t-\frac{1}{2})}{(2n+1)!}f^{2n+1}_{1/2}, \qquad \frac{1}{2}[f^{2n}_1+f^{2n}_0] = \mu f^{2n}_{1/2}.$$

Выбрав подходящие интерполяционные формулы, выполнить интерполирование табличной функции в точках x^{**}, x^{***}, x^{****}, используя максимально возможное количество узлов для каждой формулы. Варианты точек x^{**}, x^{***}, x^{****} см. в таблице 1.

3. Оценить погрешность интерполирования в этих точках, аналогично

тому, как это сделано в лабораторной работе №1. Сравнить результаты с соответствующими значениями, получаемыми при непосредственном вычислении по формуле $y = f(x)$.

Этапы выполнения лабораторной работы.

• Построить таблицу конечных разностей по значениям табличной функции.

• По соответствующим интерполяционным формулам вычислить $L_n(x^{**})$, $L_n(x^{***})$, $L_n(x^{****})$.

• С помощью формулы остаточного члена интерполяционного многочлена

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x),\ \xi \in [a,b],\ \omega_{n+1}(x) = (x-x_0)\dots(x-x_n),$$

оценить минимальное и максимальное значения $f^{(n+1)}(x)$ - производной функции y=f(x), а затем минимальное и максимальное значения остаточного члена $R_n(x)$.

• Проверить, выполняется ли неравенство $\min(R_n) < R_n(z) < \max(R_n)$, где $R_n(z) = L_1(z) - f(z)$ и $z = x^{**}, x^{***}, x^{****}$.

Тема 3. Дифференцирование таблично заданной функции с помощью многочлена Лагранжа

1. Дифференцируя заданное число раз интерполяционную формулу Лагранжа, построить формулу численного дифференцирования приближенного вычисления производной таблично заданной функции $f(x)$: $L_n^{(k)}(x_m)) \approx f^{(k)}(x_m)$, значения n, k, m см. в таблице 2. Сравнить результаты со значением, получаемым при непосредственном вычислении по формуле $f^{(k)}(x_m)$.

Этапы выполнения лабораторной работы.

• Прежде чем дифференцировать интерполяционную формулу Лагранжа, сначала привести к виду, удобному для дифференцирования, поскольку в таблице расстояние между соседними узлами равно h, то заменить все разности $(x_i - x_j)$ на $(i-j)\cdot h$.

• С помощью дифференцирования формулы остаточного члена интерполяционного многочлена

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x), \quad \xi \in [a,b],\ \omega_{n+1}(x) = (x-x_0)\dots(x-x_n),$$

получить и оценить минимальное и максимальное значения остаточного члена $R_{n,k}(x)$.
• Проверить, выполняется ли неравенство $\min(R_{n,k}) < R_{n,k}(x) < \max(R_{n,k})$, $R_{n,k}(x_m) = L_n^{(k)}(x_m) - f^{(k)}(x_m)$.

Таблица 2.

	к = 2			к = 1			
	n =3	n = 4	n = 5	n =3	n = 4	n = 5	n = 6
m=0	16	20	25	1	5	10	31
m=1	17	21	26	2	6	11	32
m=2	18	22	27	3	7	12	33
m=3	19	23	28	4	8	13	34
m=4		24	29		9	14	35
m=5			30			15	36
m=6							37

Тема 4. Квадратурные формулы

Вычислить интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$

1. по составной формуле левых прямоугольников;
2. по составной формуле правых прямоугольников;
3. по составной формуле центральных прямоугольников;
4. по формуле трапеции;
5. по формуле Симпсона;
6. по формуле Веддля: $I_{6m} = 0,3h(y_0 + 5y_1 + y_2 + 6y_3 + y_4 + 5y_5 + 2y_6 + \ldots + {} + 5y_{6m-5} + y_{6m-4} + 6y_{6m-3} + y_{6m-2} + 5y_{6m-1} + y_{6m})$;

по формуле Ньютона-Котеса: $I_n = (b-a)\sum\limits_{k=0}^{n} c_k f(x_k)$

7. $n = 1,\ c_k = (1/2,\ 1/2)$;
8. $n = 2,\ c_k = (1/6,\ 4/6,\ 1/6)$;
9. $n = 3,\ c_k = (1/8,\ 3/8,\ 3/8,\ 1/8)$;
10. $n = 4,\ c_k = (7/90,\ 32/90,\ 12/90,\ 32/90,\ 7/90)$;
11. $n = 5,\ c_k = (19/288,\ 75/288,\ 50/288,\ 50/288,\ 75/288,\ 19/288)$;
12. $n = 6,\ c_k = (41/840,\ 216/840,\ 27/840,\ 272/840,\ 27/840,\ 216/840,\ 41/840)$;

по формуле Гаусса: $I_n = \frac{(b-a)}{2}\sum\limits_{k=1}^{n} c_k f(x_k)$, где $x_k = \dfrac{b+a}{2} + \dfrac{b-a}{2}t_k$

13. $n = 1, \quad t_1 = 0, \quad c_1 = 2$;
14. $n = 2, \quad t_{1,2} = \pm 0,577350, \quad c_1 = c_2 = 1$;
15. $n = 3, \quad t_{1,3} = \pm 0,774597, \quad t_2 = 0, \quad c_1 = c_3 = 5/9, \quad c_2 = 8/9$;

16. $n=4$, $\quad t_{1,4}=\pm 0,861136$, $\quad c_1=c_4=0,347855$,
$t_{2,3}=\pm 0,339981$, $\quad c_2=c_3=0,652145$.

В вариантах 1–6 для достижения заданной точности ε сначала вычислить I_n на отрезке [a,b], затем n удвоить и вычислить I_{2n}. Если выполнено неравенство $|I_n - I_{2n}| \leq \varepsilon$, то точность считается достигнутой, и I_{2n} принимается за приближенное значение интеграла с точностью ε, в противном случае n снова удваивается, т. е. вычисляют I_{4n} и сравнивают между собой уже I_{2n} и I_{4n} и т. д.

В вариантах 7–16 для достижения заданной точности ε сначала вычислить I_n на отрезке [a,b], затем отрезок делить пополам, и к каждой половине применять квадратурную формулу с заданным n, т.е. вычислить I_{2n}. Если выполнено неравенство $|I_n - I_{2n}| \leq \varepsilon$, то точность считается достигнутой и I_{2n} принимается за приближенное значение интеграла с точностью ε, в противном случае каждая половина отрезка [a,b] делится пополам, к каждой половине применяется квадратурная формула с заданным n и сравниваются между собой уже I_{2n} и I_{4n} и т. д. до тех пор, пока не будет либо достигнута точность ε либо не будет произведено заданное количество делений отрезка [a,b].

Тема 5. Метод монотонной прогонки

Дана система линейных алгебраических уравнений специального вида

$$A_k U_{k-1} + B_k U_k + C_k U_{k+1} = F_k, \quad , k = 1, ..., N, \tag{1}$$

$$A_1 = C_N = 0.$$

Здесь $A_k, B_k, C_k, k = 1, ..., N$ - заданные коэффициенты системы, которые можно рассматривать как три диагонали матрицы системы, а остальные коэффициенты системы равны нулю; $G_k, k = 1, ..., N$ - правые части, $U_k, k = 1, ..., N$ - искомые значения, решения системы (1).

Выразим из первого уравнения системы (1) U_1 в виде

$$U_1 = -\frac{C_1}{B_1} U_2 + \frac{F_1}{B_1}. \tag{2}$$

Введем обозначения

$$\alpha_2 = -\frac{C_1}{B_1}, \quad \beta_2 = \frac{F_1}{B_1}, \tag{3}$$

тогда соотношение (2) перепишется следующим образом

$$U_1 = \alpha_2 U_2 + \beta_2. \tag{4}$$

Предположим, что

$$U_{k-1} = \alpha_k U_k + \beta_k. \tag{5}$$

Исключим из k-го уравнения системы (1) U_{k-1}, подставив соотношение (5) в k-ое уравнение, $A_k(\alpha_k U_k + \beta_k) + B_k U_k + C_k U_{k+1} = F_k$, выразим из него U_k:

$$U_k = -\frac{C_k}{B_k + A_k\alpha_k} U_{k-1} + \frac{F_k - A_k\beta_k}{B_k + A_k\alpha_k}.$$

Отсюда видно, что, введя обозначения

$$\beta_k = \frac{F_k - A_k\beta_k}{B_k + A_k\alpha_k}, \qquad \alpha_k = -\frac{C_k}{B_k + A_k\alpha_k}, \tag{6}$$

мы сведем k-ое уравнение к двучленному виду

$$U_k = \alpha_{k-1} U_{k+1} + \beta_{k+1}. \tag{7}$$

Таким образом, мы показали, что для каждого $k = 1, ..., N$ k-ое уравнение системы (1) может быть приведено к виду (7), где коэффициенты α_{k+1}, β_{k+1} могут быть вычислены по формулам (6). Эти коэффициенты называют прогоночными, а их вычисление называют прямым ходом прогонки.

В преобразованиях, описанных выше, не участвовало N-ое уравнение системы (1). Это уравнение и соотношение (7) при $k = N - 1$:

$$\begin{cases} A_N U_{N-1} + B_N U_N = F_N, \\ U_{N-1} = \alpha_N U_N + \beta_N \end{cases}$$

можно использовать для определения U_N:

$$U_N = \frac{F_N - A_N\beta_N}{A_N\alpha_N + B_N}.$$

Все остальные $U_k, k = N-1, N-2, ..., 1$, определяются по формуле (7). Вычисление U_k является обратным ходом прогонки. Этот метод называют монотонной правой прогонкой, поскольку сведение трехчленной (или, говорят, трехдиагональной) системы линейных алгебраических уравнений к двучленному виду проводится по возрастанию номеров уравнений, начиная с первого, что совершенно не принципиально, и можно производить исключение одного неизвестного в каждом уравнении по убыванию номеров, тогда получим формулы монотонной левой прогонки.

Тема 6. Сплайны

1. Эрмитовы кубические сплайны

Пусть на сетке $\bar{w}_h=\{x_i,\ i=\overline{0,N},\ x_0=a,\ x_N=b,\ x_i=x_{i-1}+h_i,\ \sum\limits_{i=1}^{N} h_i=b-a\}$ заданы значения $y_i = f(x_i),\ y_i' = f'(x_i),\ i = \overline{0,N}$.

Определение. Эрмитовым кубическим сплайном называют функцию $S(x)$, удовлетворяющую условиям:

1. $S(x) \in P_{3i}(x)$ для $\forall x \in [x_i,\ x_{i+1}],\ i = \overline{0,N-1}$,
2. $S(x) \in C^1_{[a,b]}$, (т.е. непрерывны $S(x)$ и $S'(x)$ во внутренних узлах),
3. $S(x_i) = f(x_i)$, $S'(x_i) = f'(x_i)$, $i = 0, \ldots,\ N$.

Эрмитовы сплайны являются локальными. Для их вычисления на отрезке $[x_i,\ x_{i+1}]$ достаточно использовать третье условие определения:
$S(x_i) = y_i, \quad S'(x_i) = y_i', \quad S(x_{i+1}) = y_{i+1}, \quad S'(x_{i+1}) = y'_{i+1};$
тогда $S(x)$ на отрезке $[x_i,\ x_{i+1}]$ можно записать:

$$S(x) = y_i + y_i'(x - x_i) + a_i\frac{(x - x_i)^2}{2} + b_i\frac{(x - x_i)^3}{6},$$

$$a_i = \frac{6}{h_{i+1}}\Big[\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{2y_i' + y_{i+1}'}{3}\Big], \quad b_i = \frac{12}{h_{i+1}^2}\Big[\frac{y_i' + y_{i+1}'}{2} - \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}}\Big].$$

2. Кубические нелокальные сплайны

Пусть на сетке $\bar{w}_h$ заданы $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0,N}$.

Определение. Функция $S(x)$ называется кубическим сплайном, интерполирующим функцию $f(x)$ в узлах сетки $\bar{w}_h$, если выполняются следующие условия:

1. $S(x) \in P_{3i}(x)$, для $\forall x \in [x_i,\ x_{i+1}],\ i = \overline{0,N-1}$,
2. $S(x) \in C^2[a,b]$, (т.е. непрерывны $S(x)$, $S'(x)$, $S''(x)$ во всех внутренних узлах),
3. $S(x_i) = f(x_i)$, $i = \overline{0,N}$.

Легко показать, что этими условиями сплайн определяется неоднозначно, а именно, кубический сплайн, удовлетворяющий данному определению, имеет еще 2 свободных параметра. На каждом из N отрезков сплайн определяется 4-мя коэффициентами, итого, на $[a,\ b]$ всего $4N$ коэффициентов. Условие 2): $S(x) \in C^2_{[a,b]}$ дает $3(N-1)$ равенств. Условие интерполяции 3) дает $N+1$ соотношение. Итого: $3N - 3 + N + 1 = 4N - 2$ соотношения.

Два недостающих дополнительных условия, как правило, задаются в виде краевых условий, определяющих значение сплайна или его производных на концах отрезка $[a,\ b]$:

1. $S'(a)=f'(a), \quad S'(b)=f'(b)$.
2. $S''(a)=f''(a), \quad S''(b)=f''(b)$.
3. $S^i(a){=}S^i(b),\ i{=}0,1,2$ – в этом случае говорят о периодическом сплайне.
4. $S'''(x_1+0)=S'''(x_1-0), \quad S'''(x_{N-1}-0)=S'''(x_{N-1}+0)$.

3. Построение кубического сплайна через наклоны

Кубический сплайн можно рассматривать как Эрмитов сплайн, удовлетворяющий условиям:

$$S(x_i)=y_i, \quad S'(x_i)=y_i';$$

$$S(x)=y_i+y_i'(x-x_i)+a_i\frac{(x-x_i)^2}{2}+b_i\frac{(x-x_i)^3}{6};$$

$$S'(x)=y_i'+a_i(x-x_i)+b_i\frac{(x-x_i)^2}{2}.$$

Вводя обозначение: $S'(x_i)=m_i$ - наклоны, $m_i=y_i'$, по построению получают:

$$S(x_{i+1})=y_i+m_ih_{i+1}+a_i\frac{h_{i+1}^2}{2}+b_i\frac{h_{i+1}^3}{6}=y_{i+1},$$
$$S'(x_{i+1})=y_i'+a_ih_{i+1}+b_i\frac{h_{i+1}^2}{2}=y_{i+1}'.$$

Имеют систему двух уравнений с двумя неизвестными a_i и b_i:

$$a_ih_{i+1}+b_i\frac{h_{i+1}^2}{2}=m_{i+1}-m_i,$$

$$a_i\frac{h_{i+1}^2}{2}+b_i\frac{h_{i+1}^3}{6}=y_{i+1}-y_i-m_ih_{i+1}.$$

Умножают первое уравнение в системе на $-h_{i+1}/2$ и складывают со вторым. Тогда

$$b_i\Big(\frac{h_{i+1}^3}{4}-\frac{h_{i+1}^3}{6}\Big)=\frac{m_{i+1}}{2}h_{i+1}-(y_{i+1}-y_i)+\frac{m_i}{2}h_{i+1}.$$

Отсюда получают выражение для b_i:

$$b_i=\frac{12}{h_{i+1}^2}\Big(\frac{m_{i+1}+m_i}{2}-\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}\Big).$$

Затем умножают первое уравнение в системе на $-h_{i+1}/3$ и складывают со вторым. Тогда

$$a_i\Big(\frac{h_{i+1}^2}{3}-\frac{h_{i+1}^2}{2}\Big)=\frac{m_{i+1}}{3}h_{i+1}-(y_{i+1}-y_i)+\frac{2m_i}{3}h_{i+1}$$

и коэффициент a_i имеет вид:

$$a_i = \frac{6}{h_{i+1}}\Big(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}} - \frac{m_{i+1}+2m_i}{3}\Big).$$

$$\begin{array}{ll} S''(x) = a_i + b_i(x-x_i) & \text{на } [x_i,\ x_{i+1}], \\ S''(x) = a_{i-1} + b_{i-1}(x-x_{i-1}) & \text{на } [x_{i-1},\ x_i]. \end{array}$$

Из второго условия определения кубического сплайна, а именно, непрерывности второй производной на [a,b], в том числе и в узлах сетки:

$$S''(x_i - 0) = S''(x_i + 0)$$

получают

$$a_{i-1} + b_{i-1}h_i = a_i$$

или

$$\begin{aligned} &\frac{1}{h_i}\Big(\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i} - \frac{m_i+2m_{i-1}}{3}\Big) + \frac{2}{h_i}\Big(\frac{m_i+m_{i-1}}{2} - \frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}\Big) = \\ &= \frac{1}{h_{i+1}}\Big(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}} - \frac{m_{i+1}+2m_i}{3}\Big). \end{aligned}$$

Далее осуществляют следующие выкладки:

$$\begin{aligned} &-\frac{m_i+2m_{i-1}}{3h_i} + \frac{m_i+m_{i-1}}{h_i} - \frac{y_i-y_{i-1}}{h_i^2} = \frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}^2} - \frac{m_{i+1}+2m_i}{3h_{i+1}}, \\ &\frac{2m_i+m_{i-1}}{3h_i} + \frac{m_{i+1}}{3h_{i+1}} + \frac{2m_i}{3h_{i+1}} = \frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}^2} + \frac{y_i-y_{i-1}}{h_i^2}, \\ &\frac{m_{i-1}}{h_i} + 2m_i\Big(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}}\Big) + \frac{m_{i+1}}{h_{i+1}} = 3\Big(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}^2} + \frac{y_i-y_{i-1}}{h_i^2}\Big). \end{aligned}$$

Вводят обозначения: $\mu_i = \dfrac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}$; $\lambda_i = 1-\mu_i = \dfrac{h_i}{h_i+h_{i+1}}$, $\mu_i + \lambda_i = 1$.
В результате получают систему $N{-}1$ уравнения с $N{+}1$ неизвестным m_0, $\ldots$, m_N:

$$\mu_i m_{i-1} + 2m_i + \lambda_i m_{i+1} = 3\Big(\lambda_i\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}} + \mu_i\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}\Big),\ i = \overline{1, N{-}1}. \quad (1)$$

Для замыкания системы необходимо добавить два уравнения:
1 краевое условие: $S'(a) = y'(a);\ S'(b) = y'(b)$, тогда $m_0 = y_0';\ m_N = y_N'$.
2 краевое условие: $S''(a) = y''(a);\ S''(b) = y''(b)$.

$$a_0 = y_0'';\ a_{N-1} + b_{N-1}h_N = y_N''.$$

Первое соотношение в условии позволяет получить следующее уравнение:

$$\frac{6}{h_1}\Big(\frac{y_1-y_0}{h_1}-\frac{m_1+2m_0}{3}\Big)=y_0''\Rightarrow -\frac{2m_1}{h_1}-\frac{4m_0}{h_1}=y_0''-\frac{6(y_1-y_0)}{h_1^2}\Rightarrow$$
$$2m_0+m_1=\frac{3}{h_1}(y_1-y_0)-\frac{h_1}{2}y_0''.$$

Второе соотношение позволяет получить второе недостающее уравнение:

$$\frac{6}{h_N}\Big(\frac{y_N-y_{N-1}}{h_N}-\frac{m_N+2m_{N-1}}{3}\Big)+\frac{12}{h_N}\Big(\frac{m_N+m_{N-1}}{2}-\frac{y_N-y_{N-1}}{h_N}\Big)=y_N'',$$
$$-2m_N-4m_{N-1}+6m_N+6m_{N-1}=h_N\Big(y_N''-\frac{6(y_N-y_{N-1})}{h_N^2}+\frac{12(y_N-y_{N-1})}{h_N^2}\Big),$$
$$2m_N+m_{N-1}=\frac{h_Ny_N''}{2}+\frac{3(y_N-y_{N-1})}{h_N}.$$

Окончательно получают следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2m_0+m_1=\dfrac{3}{h_1}(y_1-y_0)-\dfrac{h_1}{2}y_0'',\\ \mu_im_{i-1}+2m_i+\lambda_im_{i+1}=3\Big(\lambda_i\dfrac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}+\mu_i\dfrac{y_i-y_{i-1}}{h_i}\Big),\ i=\overline{1,N-1},\\ 2m_N+m_{N-1}=\dfrac{h_Ny_N''}{2}+\dfrac{3(y_N-y_{N-1})}{h_N}. \end{cases}$$

3 краевое условие (периодичность):

$$\begin{array}{lll} y_N=y_0, & y_{N+1}=y_1, & \dots,\\ m_N=m_0, & m_{N+1}=m_1, & \dots,\\ h_1=h_{N+1}, & h_2=h_{N+2}, & \dots,\\ \mu_{N+1}=\mu_1=\dfrac{h_1}{h_{N+2}+h_1}. & & \end{array}$$

Эти условия добавляют два уравнения к системе уравнений (1):
$\mu_1m_N+2m_1+\lambda_1m_2=g_1$,
$\mu_Nm_{N-1}+2m_N+\lambda_Nm_1=g_N$.
4 краевое условие:
$S'''(x_1-0)=S'''(x_1+0)$, $S'''(x_{N-1}-0)=S'''(x_{N-1}+0)$.

Сначала рассматривается первое соотношение.
$S'''(x_1-0)=S'''(x_1+0)\Longrightarrow b_0=b_1$
или
$$\frac{1}{h_1^2}\left(\frac{m_1+m_0}{2}-\frac{y_1-y_0}{h_1}\right)=\frac{1}{h_2^2}\left(\frac{m_2+m_1}{2}-\frac{y_2-y_1}{h_2}\right).$$
Уравнение умножают на $2h_1h_2$ и получают

$\frac{h_2}{h_1}(m_1+m_0)-\frac{h_1}{h_2}(m_2+m_1)=-\frac{y_2-y_1}{h_2}\cdot 2\frac{h_1}{h_2}+\frac{y_1-y_0}{h_1}\cdot 2\frac{h_2}{h_1},$

$m_0+(1-(\frac{h_1}{h_2})^2)m_1-\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 m_2=2\left(\frac{y_1-y_0}{h_1}-\frac{y_2-y_1}{h_2}\cdot\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2\right).$

Если обозначить $h_1/h_2=\gamma_1$, то уравнение примет вид:

$m_0+(1-\gamma_1^2)m_1-\gamma_1^2 m_2=2\frac{y_1-y_0}{h_1}-2\gamma_1^2\frac{y_2-y_1}{h_2}.$

Добавляют к полученному уравнению первое уравнение из системы (1):

$\mu_1 m_0+2m_1+\lambda_1 m_2=3\Big(\lambda_1\frac{y_2-y_1}{h_2}+\mu_1\frac{y_1-y_0}{h_1}\Big).$

Тогда имеют систему двух уравнений относительно трех неизвестных m_0, m_1, m_2:

$m_0+(1-\gamma_1^2)m_1-\gamma_1^2 m_2=2\frac{y_1-y_0}{h_1}-2\gamma_1^2\frac{y_2-y_1}{h_2},$

$\mu_1 m_0+2m_1+\lambda_1 m_2=3\Big(\lambda_1\frac{y_2-y_1}{h_2}+\mu_1\frac{y_1-y_0}{h_1}\Big).$

Умножают первое уравнение на μ_1 и вычитают из второго:

$(2-\mu_1+\mu_1\gamma_1^2)m_1+(\lambda_1+\mu_1\gamma_1^2)m_2=(3\lambda_1+2\mu_1\gamma_1^2)\frac{y_2-y_1}{h_2}+\mu_1\frac{y_1-y_0}{h_1}.$

Если учесть, что

1)$\mu_1\gamma_1^2=\frac{h_1^2}{(h_1+h_2)h_2}=\frac{h_1}{h_1+h_2}\frac{h_1}{h_2}=\lambda_1\gamma_1,$

2)$\lambda_1+\mu_1\gamma_1^2=\lambda_1+\lambda_1\gamma_1=\lambda_1(1+\gamma_1)=\frac{h_1}{h_1+h_2}\left(1+\frac{h_1}{h_2}\right)=\frac{h_1}{h_2}=\gamma_1,$

3)$2-\mu_1+\mu_1\gamma_1^2=1+\lambda_1+\lambda_1\gamma_1=1+\gamma_1,$

4)$3\lambda_1+2\mu_1\gamma_1^2=3\lambda_1+2\lambda_1\gamma_1=\lambda_1(3+2\gamma_1),$

то $b_0=b_1$ примет вид:

$(1+\gamma_1)m_1+\gamma_1 m_2=\lambda_1(3+2\gamma_1)\frac{y_2-y_1}{h_2}+\mu_1\frac{y_1-y_0}{h_1}.$

Аналогичные преобразования осуществляются для второго соотношения 4-го краевого условия.

$S'''(x_{N-1}-0)=S'''(x_{N-1}+0)\Longrightarrow b_{N-2}=b_{N-1}.$

$\frac{1}{h_{N-1}^2}\left(\frac{m_{N-1}+m_{N-2}}{2}-\frac{y_{N-1}-y_{N-2}}{h_{N-1}}\right)=\frac{1}{h_N^2}\left(\frac{m_N+m_{N-1}}{2}-\frac{y_N-y_{N-1}}{h_N}\right).$

Вводят обозначение $\frac{h_N}{h_{N-1}}=\gamma_N$. Тогда

$$\left\{\begin{array}{l}\gamma_N^2 m_{N-2}-(1-\gamma_N^2)m_{N-1}-m_N=2\left(\gamma_N^2\frac{y_{N-1}-y_{N-2}}{h_{N-1}}-\frac{y_N-y_{N-1}}{h_N}\right),\\ (N-1)-\text{ое уравнение системы имеет вид:}\\ \mu_{N-1}m_{N-2}+2m_{N-1}+\lambda_{N-1}m_N=3\Big(\lambda_{N-1}\frac{y_N-y_{N-1}}{h_N}+\mu_{N-1}\frac{y_{N-1}-y_{N-2}}{h_{N-1}}\Big).\end{array}\right.$$

Умножая первое уравнение на λ_{N-1} и складывая со вторым, получают:
$(\mu_{N-1}+\lambda_{N-1}\gamma_N^2)m_{N-2}+(2-(1-\gamma_N^2)\lambda_{N-1})m_{N-1}=$
$=\lambda_{N-1}\dfrac{y_N-y_{N-1}}{h_N}+(3\mu_{N-1}+2\mu_{N-1}\gamma_N)\dfrac{y_{N-1}-y_{N-2}}{h_{N-1}}.$

С учетом того, что
$\mu_{N-1}+\lambda_{N-1}\dfrac{h_N^2}{h_{N-1}^2}=\dfrac{h_N}{h_N+h_{N-1}}+\dfrac{h_N^2}{(h_N+h_{N-1})h_{N-1}}=\mu_{N-1}(1+\gamma_N)=\gamma_N,$
$2-\lambda_{N-1}+\lambda_{N-1}\gamma_N^2=1+\mu_{N-1}+\mu_{N-1}\gamma_N=1+\mu_{N-1}(1+\gamma_N)=1+\gamma_N,$
имеют
$\gamma_N m_{N-2}+(1+\gamma_N)m_{N-1}=\mu_{N-1}(3+2\gamma_N)\dfrac{y_{N-1}-y_{N-2}}{h_{N-1}}+\lambda_{N-1}\dfrac{y_N-y_{N-1}}{h_N}.$

Итак, в случае краевых условий 4-ого типа имеют:

$$(1+\gamma_1)\,m_1+\gamma_1 m_2=\lambda_1\,(3+2\gamma_1)\,\frac{y_2-y_1}{h_2}+\mu_1\frac{y_1-y_0}{h_1};$$

$$\mu_i m_{i-1}+2m_i+\lambda_i m_{i+1}=3\left(\lambda_i\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}+\mu_i\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}\right),\ i=\overline{2,N-2};$$

$$\gamma_N m_{N-2}+(1+\gamma_N)\,m_{N-1}=\mu_{N-1}\,(3+2\gamma_N)\,\frac{y_{N-1}-y_{N-2}}{h_{N-1}}+\lambda_{N-1}\frac{y_N-y_{N-1}}{h_N}.$$

4. Построение кубического сплайна через моменты

Моментами называются $S''(x_i)=M_i;\ i=\overline{0,N};$

$$S(x)=y_i+c_i(x-x_i)+a_i\frac{(x-x_i)^2}{2}+b_i\frac{(x-x_i)^3}{6}\ \text{на}\ \left[x_i,\ x_{i+1}\right],$$
$$S'(x)=c_i+a_i(x-x_i)+b_i\frac{(x-x_i)^2}{2},$$
$$S''(x)=a_i+b_i(x-x_i),$$
$$S'''(x)=b_i,$$
$$S''(x_i)=a_i=M_i;\ S''(x_{i+1})=a_i+b_ih_{i+1}\Rightarrow b_i=\frac{M_{i+1}-M_i}{h_{i+1}}.$$

Отсюда: $S(x_{i+1})=y_i+c_ih_{i+1}+M_i\dfrac{h_{i+1}^2}{2}+(M_{i+1}-M_i)\dfrac{h_{i+1}^2}{6}=y_{i+1}$, тогда
$c_i=\dfrac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}-M_i\dfrac{h_{i+1}}{2}-(M_{i+1}-M_i)\dfrac{h_{i+1}}{6}=\dfrac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}-\dfrac{h_{i+1}}{6}(2M_i+M_{i+1}).$

Из условия непрерывности первой производной для $S(x)$ в узлах x_i, имеют:
$S'_{i-1}(x_i)=S'_i(x_i),$

$\dfrac{y_i-y_{i-1}}{h_i}-\dfrac{h_i}{6}(2M_{i-1}+M_i)+M_{i-1}h_i+\dfrac{M_i-M_{i-1}}{2}h_i=\dfrac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}-\dfrac{h_{i+1}}{6}(2M_i+M_{i+1})$,

$\dfrac{h_i}{6}M_{i-1}+\dfrac{1}{3}M_i(h_i+h_{i+1})+\dfrac{h_{i+1}}{6}M_{i+1}=\dfrac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}-\dfrac{y_i-y_{i-1}}{h_i}$,

$$\lambda_i M_{i-1}+2M_i+\mu_i M_{i+1}=\frac{6}{h_i+h_{i+1}}\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}-\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}\right),\ i=\overline{1,N-1}. \tag{2}$$

Для получения замкнутой системы для определения моментов нужно добавить краевые условия к системе (2):
1 краевое условие: $S'(a)=A;\ S'(b)=B$.

$\dfrac{y_1-y_0}{h_1}-\dfrac{h_1}{6}(2M_0+M_1)=A\Longrightarrow \boxed{2M_0+M_1=\dfrac{6}{h_1}\Big(\dfrac{y_1-y_0}{h_1}-A\Big).}$

$\dfrac{y_N-y_{N-1}}{h_N}-\dfrac{h_N}{6}(2M_{N-1}+M_N)+M_{N-1}h_N+\dfrac{h_N}{2}(M_N-M_{N-1})=B$,

$\dfrac{h_N}{6}M_{N-1}+\dfrac{h_N}{3}M_N=B-\dfrac{y_N-y_{N-1}}{h_N}\Longrightarrow$

$\Longrightarrow \boxed{M_{N-1}+2M_N=\dfrac{6}{h_N}\left(B-\dfrac{y_N-y_{N-1}}{h_N}\right).}$

Неизвестные моменты находятся из системы уравнений:

$$\begin{cases} 2M_0+M_1=\dfrac{6}{h_1}\Big(\dfrac{y_1-y_0}{h_1}-A\Big),\\ \lambda_i M_{i-1}+2M_i+\mu_i M_{i+1}=\dfrac{6}{h_i+h_{i+1}}\left(\dfrac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}-\dfrac{y_i-y_{i-1}}{h_i}\right),\ i=\overline{1,N-1},\\ M_{N-1}+2M_N=\dfrac{6}{h_N}\left(B-\dfrac{y_N-y_{N-1}}{h_N}\right). \end{cases}$$

2 краевое условие: $S''(a)=A;\ S''(b)=B$, тогда $M_0=A;\ M_N=B$.
3 краевое условие:
$\boxed{M_0=M_N;\ M_{N+1}=M_1;\ h_1=h_{N+1}.}$
4 краевое условие: $S'''(x_1+0)=S'''(x_1-0)\,,S'''(x_{N-1}-0)=S'''(x_{N-1}+0)$.
Рассматривают первое равенство $S'''(x_1+0)=S'''(x_1-0)$.
$b_0=b_1\Longrightarrow \dfrac{M_1-M_0}{h_1}=\dfrac{M_2-M_1}{h_2}\Rightarrow -M_0+M_1=\dfrac{h_1}{h_2}(M_2-M_1)$.

Обозначают $\gamma_1 = \dfrac{h_1}{h_2}$ и рассматривают систему из двух уравнений.

$$\begin{cases} \quad\quad M_0 - (1+\gamma_1)M_1 + \gamma_1 M_2 = 0, \\ \text{1-ое уравнение системы имеет вид:} \\ \lambda_1 M_0 + 2M_1 + \mu_1 M_2 = \dfrac{6}{h_1+h_2}\left(\dfrac{y_2-y_1}{h_2} - \dfrac{y_1-y_0}{h_1}\right). \end{cases}$$

Умножают первое уравнение на λ_1 и вычитают из второго уравнения:

$$M_1(2+\lambda_1(1+\gamma_1)) + (\mu_1 - \lambda_1\gamma_1)M_2 = \frac{6}{h_1+h_2}\left(\frac{y_2-y_1}{h_2} - \frac{y_1-y_0}{h_1}\right).$$

Так как

$$2+\lambda_1(1+\gamma_1) = 2 + \frac{h_1}{h_2} = 2+\gamma_1,$$

$\mu_1 - \lambda_1\gamma_1 = \dfrac{h_2}{h_1+h_2} - \dfrac{h_1}{h_1+h_2}\dfrac{h_1}{h_2} = \dfrac{h_2-h_1}{h_2}$, то

$$\boxed{(2+\gamma_1)\,M_1 + \frac{h_2-h_1}{h_2}M_2 = \frac{6}{h_1+h_2}\left(\frac{y_2-y_1}{h_2} - \frac{y_1-y_0}{h_1}\right).}$$

Далее рассматривают второе условие $S'''(x_{N-1}+0) = S'''(x_{N-1}-0)$.

$$b_{N-2} = b_{N-1} \Longrightarrow \frac{M_{N-1}-M_{N-2}}{h_{N-1}} = \frac{M_N - M_{N-1}}{h_N}.$$

Обозначают $\gamma_N = \dfrac{h_N}{h_{N-1}}$ и рассматривают систему из двух уравнений.

$$\begin{cases} \quad\quad -\gamma_N M_{N-2} + (1+\gamma_N)M_{N-1} - M_N = 0, \\ \text{(N-1)-ое уравнение системы имеет вид:} \\ \lambda_{N-1}M_{N-2} + 2M_{N-1} + \mu_{N-1}M_N = \dfrac{6}{h_{N-1}+h_N}\left(\dfrac{y_N-y_{N-1}}{h_N} - \dfrac{y_{N-1}-y_{N-2}}{h_{N-1}}\right). \end{cases}$$

Умножают первое уравнение на μ_{N-1}и складывают со вторым уравнением системы:

$$(\lambda_{N-1} - \mu_{N-1}\gamma_N)M_{N-2} + (2+\mu_{N-1}(1+\gamma_N))M_{N-1} =$$
$$= \frac{6}{h_{N-1}+h_N}\left(\frac{y_N-y_{N-1}}{h_N} - \frac{y_{N-1}-y_{N-2}}{h_{N-1}}\right).$$

Так как

$$\lambda_{N-1} - \mu_{N-1}\gamma_N = \frac{h_{N-1}}{h_{N-1}+h_N} - \frac{h_N}{h_N+h_{N-1}}\frac{h_N}{h_{N-1}} = \frac{h_{N-1}-h_N}{h_{N-1}},$$

$$2+\mu_{N-1}(1+\gamma_N) = 2 + \frac{h_N}{h_{N-1}} = 2+\gamma_N,$$

то

$$\frac{h_{N-1}-h_N}{h_{N-1}}M_{N-2} + (2+\gamma_N)M_{N-1} = \frac{6}{h_{N-1}+h_N}\left(\frac{y_N-y_{N-1}}{h_N} - \frac{y_{N-1}-y_{N-2}}{h_{N-1}}\right).$$

Для нахождения моментов необходимо решить систему:

$$\begin{cases} (2+\gamma_1)M_1 + \dfrac{h_2-h_1}{h_2}M_2 = \dfrac{6}{h_1+h_2}(\dfrac{y_2-y_1}{h_2} - \dfrac{y_1-y_0}{h_1}), \\ \lambda_i M_{i-1} + 2M_i + \mu_i M_{i+1} = \dfrac{6}{h_i+h_{i+1}}(\dfrac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}} - \dfrac{y_i-y_{i-1}}{h_i}),\ i=\overline{1,N-1}, \\ \dfrac{h_{N-1}-h_N}{h_{N-1}}M_{N-2} + (2+\gamma_N)M_{N-1} = \dfrac{6}{h_{N-1}+h_N}(\dfrac{y_N-y_{N-1}}{h_N} - \dfrac{y_{N-1}-y_{N-2}}{h_{N-1}}). \end{cases}$$

5. Дифференцирование и интегрирование кубического сплайна

1. Если сплайн $S(x)$ определен через наклоны m_i, то вычисление $S'(x)$ не представляет труда, т. к.

$S'(x_i) = m_i$;

$$S'(x) = m_i + \frac{6(x-x_i)}{h_{i+1}}\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}} - \frac{m_{i+1}+2m_i}{3}\right) +$$

$$+ \frac{6(x-x_i)^2}{h_{i+1}^2}\left(\frac{m_{i+1}+m_i}{2} - \frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}\right);$$

$$S''(x) = \frac{6}{h_{i+1}}\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}} - \frac{m_{i+1}+2m_i}{3}\right) + \frac{12(x-x_i)}{h_{i+1}^2}\left(\frac{m_{i+1}+m_i}{2} - \frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}\right);$$

$$\int\limits_a^b S(x)dx = \sum_{i=0}^{N-1}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} S(x)dx;$$

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} S(x)dx = \left[y_i x + m_i\frac{(x-x_i)^2}{2} + a_i\frac{(x-x_i)^3}{6} + b_i\frac{(x-x_i)^4}{24}\right]_{x_i}^{x_{i+1}} =$$

$$= y_i h_{i+1} + \frac{m_i h_{i+1}^2}{2} + h_{i+1}^2\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}} - \frac{m_{i+1}+2m_i}{3}\right) + \frac{h_{i+1}^2}{2}\left(\frac{m_{i+1}+m_i}{2} - \frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}\right) =$$

$$= h_{i+1}\frac{y_{i+1}+y_i}{2} + h_{i+1}^2\frac{m_i - m_{i+1}}{12}.$$

2. Если сплайн $S(x)$ определен через наклоны M_i, то

$$S'(x) = \frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}}{6}(2M_i + M_{i+1}) + M_i(x-x_i) + \frac{M_{i+1}-M_i}{h_{i+1}}\frac{(x-x_i)^2}{2};$$

$S''(x_i) = M_i$;

$$S''(x) = M_i + \frac{M_{i+1}-M_i}{h_{i+1}}(x-x_i);$$

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} S(x)dx = y_i h_{i+1} + \frac{h_{i+1}^2}{2}\left[\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}}{6}(2M_i + M_{i+1})\right] + \frac{M_i h_{i+1}^3}{6} +$$

$$+\frac{h_{i+1}^3}{24}(M_{i+1}-M_i)=\frac{h_{i+1}}{2}(y_i+y_{i+1})-\frac{h_{i+1}^3}{24}(M_i+M_{i+1}).$$

Варианты заданий

Таблица 3. Построение сплайна через наклоны

I тип кр. усл.	II тип кр. усл.	IV тип кр. усл.	
1	9	17	Задача интерполирования, данные из лаб. раб. 1
2	10	18	Задача интегрирования, данные из лаб. раб. 4
3	11	19	Задача дифференцирования (первая производная), данные из лаб. раб. 1
4	12	20	Задача дифференцирования (вторая производная), данные из лаб. раб. 1

Таблица 4. Построение сплайна через моменты

1 тип кр. усл.	2 тип кр. усл.	4 тип кр. усл.	
5	13	21	Задача интерполирования, данные из лаб. раб. 1
6	14	22	Задача интегрирования, данные из лаб. раб. 4
7	15	23	Задача дифференцирования (первая производная), данные из лаб. раб. 1
8	16	24	Задача дифференцирования (вторая производная), данные из лаб. раб. 1

В полях таблиц указан номер варианта.

Тема 7. Численное решение уравнения f(x)=0 методом хорд и касательных

Найти действительные корни уравнения

$$f(x)=0 \tag{1}$$

с заданной точностью ε, т.е. указать такое x, что $|x^* - x| < \varepsilon$, где x^* — корень уравнения $f(x) = 0$. Решение этой задачи состоит из двух этапов.
1. Отделение корней. На этом этапе выделяют отрезки $[\alpha_i, \beta_i]$, принадлежащие области определения функции $f(x)$, на каждом из которых расположен один и только один корень уравнения (1), такие корни называются изолированными. Границы каждого отрезка рассматривают как первое приближение искомого корня, α_i - с недостатком, β_i - с избытком. Тогда погрешность такого приближения не превзойдет длины l_i отрезка $[\alpha_i, \beta_i]$. Для отделения корней уравнения (1) можно воспользоваться первой теоремой Больцано — Коши. Если функция $f(x)$ на отрезке $[\alpha_i, \beta_i]$ удовлетворяет условиям этой теоремы, то внутри этого отрезка содержится по меньшей мере один корень уравнения (1). Корень будет заведомо единственным, если производная $f'(x)$ существует и сохраняет постоянный знак внутри отрезка $[\alpha_i, \beta_i]$. Таким образом, участки, отделяющие корни уравнения (1) следует искать на интервалах знакопостоянства производной функции $f(x)$.

Другой простой способ выделения корней состоит в преобразовании уравнения (1) к виду $\Phi(x) = \Psi(x)$, где функции $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ более простые, чем функция $f(x)$. Тогда, построив графики функций $y = \Phi(x)$ и $y = \Psi(x)$, искомые корни получают как абсциссы точек пересечения этих графиков.

2. Нахождение отделенного корня с любой наперед заданной степенью точности ε.

Считаем, что искомый корень уравнения (1) отделен и лежит на отрезке $[\alpha_i, \beta_i]$, на котором функция $f(x)$ непрерывна и дважды дифференцируема, причем производные $f'(x)$ и $f''(x)$ сохраняют каждая свой знак.

В этом случае возможны четыре комбинации знаков первой и второй производных, которые определяют четыре типа расположения кривой $y = f(x)$:
а) $f'(x) > 0, \quad f''(x) > 0$ — функция вогнутая и возрастает;
б) $f'(x) > 0, \quad f''(x) < 0$ — функция выпуклая и возрастает;
в) $f'(x) < 0, \quad f''(x) > 0$ — функция вогнутая и убывает;
г) $f'(x) < 0, \quad f''(x) < 0$ — функция выпуклая и убывает.

Рассмотрение четырех случаев необходимо для определения того, с какого конца отрезка $[\alpha_i, \beta_i]$ возможно применение метода касательных, а именно, с конца, в котором значение функции и ее второй производной имеет одинаковый знак. Тогда противоположный конец отрезка используется для применения метода хорд. Расчетные формулы методов имеют вид:

$$\bar{x}_n = \bar{x}_{n-1} - \frac{f(\bar{x}_{n-1})}{f'(\bar{x}_{n-1})},$$

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})(\bar{x}_{n-1} - x_{n-1})}{f(\bar{x}_{n-1}) - f(x_{n-1})},\ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$\bar{x}_0, \bar{x}_1, \ldots$ – приближения по методу касательных,
$x_0, x_1, \ldots$ – приближения по методу хорд.

Вычисления по формулам прекращают, когда $|x_n - \bar{x}_n)| < \varepsilon$.

Таблица 5.

№	Вид уравнения **f(x)=0**	искомый корень
1	$0 = 1.2x^2 - sin(10x)$	все положительные корни
2	$0 = 2\sqrt{x} - \cos(\pi x/2)$	все корни
3	$0 = 2^x - 2x^2 - 1$	положительные корни
4	$0 = 2\ln x - 1/x$	все корни
5	$0 = 2\lg x - x/2 + 1$	положительные корни
6	$0 = \lg x - 7/(2x+6)$	все корни
7	$0 = x\lg x - 1/2$	все корни
8	$0 = \lg(3x-1) + exp(2x-1)$	все корни
9	$0 = exp(-x) - 2(x-1)^2$	все корни
10	$0 = 2 - x\exp(x)$	все корни
11	$0 = 1/x - \pi\cos(\pi x)$	все положительные корни
12	$0 = sec(x) - x^2 - 1$	все положительные корни
13	$0 = ctg(1,05x) - x^2$	все положительные корни
14	$0 = 2x - \lg(x) - 7$	все положительные корни
15	$0 = exp(-x) + x^2 - 2$	отрицательные корни
16	$0 = 0,5x^2 - \cos(2x)$	все корни
17	$0 = \ln(0,5x) - 0,5\cos(x)$	все корни
18	$0 = \ln(2x) - exp(2x)$	все корни
19	$0 = \exp(-x) + x^3 - 3$	все положительные корни
20	$0 = 2x^2 - \cos(2x)$	все корни
21	$0 = x^2 - 20\sin x$	все корни
22	$0 = x^2 - \sin 5x$	все корни
23	$0 = \ln x + (x+1)^3$	все корни
24	$0 = 2,2x - 2^x$	наименьший корень

Список литературы

1. Бахвалов Н.С.Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. -М.: Наука,1987.

2. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. В 2-х томах. -М.: Физматгиз, 1962.

3. Волков Е.А. Численные методы. -М.: Наука,1987.

4. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. -М.: Наука, 1966.

5. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. -М.: Наука, 1980.

6. Калиткин Н.Н. Численные методы. -М.: Наука, 1978.

7. Колобов А.Г.

8. Крылов В.И.,Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы: В 2-х т. -М.: Наука,1976-1977.

9. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. -М.: Наука,1989.

Учебное издание

Татьяна Владимировна Пак

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ ПО ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДАМ

Методические указания и задания для студентов
математических специальностей

В авторской редакции
Технический редактор Л.М. Гурова
Компьютерный набор и верстка Л. А. Молчановой

Подписано в печать 28.11.2007
Формат 60 × 84 1/16. Усл. печ. л. 1,3. Уч.-изд. л. 1,5
Тираж 50 экз.

Издательство Дальневосточного университета
690950, Владивосток, ул. Октябрьская, 27.
Отпечатано в лаборатории
кафедры компьютерных наук ИМКН ДВГУ
690950, Владивосток, ул. Октябрьская, 27, к. 132.